Exo7

Année 2009

Exercices de mathématiques

Relation d'équivalence, relation d'ordre

1 Relation d'équivalence

Exercice 1. Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E, symétrique et transitive. Que penser du raisonnement suivant ?

"$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est symétrique,
or ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$) $\Rightarrow x\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est transitive,
donc $\mathcal{R}$ est réflexive."

Exercice 3. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

2 Relation d'ordre

Exercice 4. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ la relation $\mathcal{R}$ par $X\mathcal{R}Y$ ssi ($X = Y$ ou $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ x \leq y$). Vérifier que c'est une relation d'ordre.

Indications 1. Un dessin permettra d'avoir une bonne idée de ce qui se passe...

Indications 2. Il faut trouver l'erreur dans ce raisonnement, car bien sûr s'il y a trois axiomes pour la définition d'une relation d'équivalence, c'est que deux ne suffisent pas !

Indications 3.

1. Pour la transitivité on pourra calculer xye^z.
2. Poser la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t}$, après une étude de fonction on calculera le nombre d'antécédents possibles.

Correction 1.

1. Soit z, z', z'' des complexes quelconques.
   - Reflexivité : $z\mathcal{R}z$ car $|z| = |z|$.
   - Symétrie : $z\mathcal{R}z' \Rightarrow z'\mathcal{R}z$ car $|z| = |z'|$ et donc $|z'| = |z|$.
   - Transitivité : $z\mathcal{R}z'$ et $z'\mathcal{R}z''$ alors $|z| = |z'| = |z''|$ donc $z\mathcal{R}z''$.

   En fait, nous avons juste retranscrit que l'égalité $=$ est une relation d'équivalence.
2. La classe d'équivalence d'un point $z \in \mathbb{C}$ est l'ensemble des complexes qui sont en relation avec z, *i.e.* l'ensemble des complexes dont le module est égal à $|z|$. Géométriquement la classe d'équivalence de z est le cerlce $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon $|z|$.

$$\mathcal{C} = \{|z|e^{i\theta} \ / \ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Correction 2. Le raisonnement est faux.
L'erreur est due au manque de quantification. En effet, rien ne prouve que pout tout x un tel y existe. Il peut exister un élément x qui n'est en relation avec personne (même pas avec lui).

Correction 3.

1. – Reflexivité : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xe^x = xe^x$ donc $x\mathcal{R}x$.
   – Symétrie : Pour $x, y \in \mathbb{R}$, si $x\mathcal{R}y$ alors $xe^y = ye^x$ donc $ye^x = xe^y$ donc $y\mathcal{R}x$.
   – Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $xe^y = ye^x$ et $ye^z = ze^y$. Calculons xye^z :

   $$xye^z = x(ye^z) = x(ze^y) = z(xe^y) = z(ye^x) = yze^x.$$

   Donc $xye^z = yze^x$. Si $y \neq 0$ alors en divisant par y on vient de montrer que $xe^z = ze^x$ donc $x\mathcal{R}z$ et c'est fini. Pour le cas $y = 0$ alors $x = 0$ et $z = 0$ donc $x\mathcal{R}z$ également.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On note $\mathcal{C}(x)$ la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$:

   $$\mathcal{C}(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid y\mathcal{R}x\}.$$

   Donc
   $$\mathcal{C}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid xe^y = ye^x\}.$$

   Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

   $$f(t) = \frac{t}{e^t}.$$

   Alors
   $$\mathcal{C}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(y)\}.$$

Autrement dit $\mathcal{C}(x)$ est l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ qui par f prennent la même valeur que $f(x)$: en raccourci :

$$\mathcal{C}(x) = f^{-1}(f(x)).$$

Étudions maintenant la fonction f afin de déterminer le nombre d'antécédents : par un calcul de f' on montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ puis strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus en $-\infty$ la limite de f est $-\infty$, $f(1) = \frac{1}{e}$, et la limite en $+\infty$ est 0.
C'est le moment de dessiner le graphe de f !!
Pour $x > 0$ alors $f(x) \in]0, \frac{1}{e}]$ et alors $f(x)$ a deux antécédents. Pour $x \leqslant 0$ alors $f(x) \in]-\infty, 0]$ et alors $f(x)$ a un seul antécédent.
Bilan : si $x > 0$ alors $\operatorname{Card} \mathcal{C}(x) = \operatorname{Card} f^{-1}(f(x)) = 2$, si $x \leqslant 0$ alors $\operatorname{Card} \mathcal{C}(x) = \operatorname{Card} f^{-1}(f(x)) = 1$.

Correction 4. – Reflexivité : pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$ on a $X\mathcal{R}X$ car $X = X$.
– Anti-symétrie : pour $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X\mathcal{R}Y$ et $Y\mathcal{R}X$, alors par définition de $\mathcal{R}$ on a

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x.$$

Comme la relation $\leq$ est une relation d'ordre alors $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ implique $x = y$. Donc

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x = y,$$

ce qui implique que $X = Y$ (dans ce cas en fait X est vide ou un singleton).
– Transitivité : soit $X, Y, Z \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X\mathcal{R}Y$ et $Y\mathcal{R}Z$. Si $X = Y$ ou $Y = Z$ alors il est clair que $X\mathcal{R}Z$. Supposons que $X \neq Y$ et $Y \neq Z$ alors

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leqslant y \qquad \text{et} \qquad \forall y \in Y \quad \forall z \in Z \quad y \leqslant z.$$

Donc on a

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad \forall z \in Z \quad x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z,$$

alors par transitivité de la relation $\leq$ on obtient :

$$\forall x \in X \quad \forall z \in Z \quad x \leqslant z.$$

Donc $X\mathcal{R}Z$.